Clase 13

Potencial Eléctrico

Cálculo del potencial eléctrico

Ejemplo 35: Efecto punta

En un conductor el campo eléctrico es mas intenso cerca de las puntas y protuberancias pues el exceso de carga tiende a acumularse en esas regiones. Podemos modelar ese efecto considerando dos esferas de radios $R_1 > R_2$ separadas por una distancia suficientemente grande y conectadas por un alambre fino. Despreciando los efectos del alambre y de la interacción entre las esferas se mantiene la simetria esférica en cada una de ellas y los potenciales son,

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad , \quad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

donde Q_1 y Q_2 son las cargas en las eferas.Como están conectadas $V_1 = V_2$. De aqui llegamos a la relación $Q_1R_2 = Q_2R_1$ que para las densidades de carga se traduce en $\sigma_1 < \sigma_2$. El campo eléctrico en la superficie que es proporcional a la densidad de carga es mas intenso en la esfera de radio menor.

Conexión a tierra

El ejemplo anterior sirve para introducir el concepto de conexión de tierra. Como vimos el potencial de una esfera de radio R, fijando el potencial en infinito a cero, es Q/R donde Q es la carga finita. Mientras ésta se mantenga finita el potencial será menor mientras mayor sea el radio. Al conectar un sistema de conductores a este conductor su potencial disminuirá. En el caso límite en que la esfera es muy grande y la carga despreciable el potencial de la esfera que es cero no se modifica apreciablemente al conectarla al sistema de conductores. Decimos entonces que hemos hecho una conexión a tierr pues en las aplicaciones reales conectamos a un conductor grande en contacto con el suelo y se produce el mismo efecto (pues la tierra actúa como un conductor)

Ejemplo 35: Potencial debido a un segmento con densidad λ.

Consideremos una distribución lineal de carga con densidad de carga λ constante con longitud $2a$. ¿Cual es el valor del potencial en un punto sobre la perpendicular que pasa por su punto medio a una distancia x?

Escogemos el sistema de coordenadas con el eje x pasando por el punto medio y el eje y en la dirección del segmento de carga. El punto donde nos interesa el potencial es $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}}$. Los puntos de la distribución los parametrizamos como $\vec{\mathbf{r}}' = y'\hat{\mathbf{y}}$. El elemento de línea es $dl = dy'$. El potencial,

$$\begin{aligned} V(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\vec{\mathbf{r}}')dl}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a} \frac{dy'}{\sqrt{x^2 + y'^2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{-a + \sqrt{x^2 + a^2}}\right) \end{aligned}$$

<u>Cálculo del potencial con simetría cilíndrica</u>

La expresiones integrales para el cálculo del potencial eléctrico se obtienen fijando a cero el valor del potencial en infinito. Para las distribuciones con simetría axial ello no siempre es posible ya que la distribución de carga puede extenderse hasta el infinito. En esos casos es mas útil calcular el potencial a partir del campo eléctrico obtenido de la ley de Gauss.

Ejemplo 36: Potencial de línea de carga infinita.

Supongamos que la línea de carga se encuentra a lo largo del eje z y que su densidad de carga es λ. El campo eléctrico se calcula ya sea por integración directa o usando la ley de Gauss con el resultado expresado en coordenadas cilíndricas,

$$\vec{\mathbf{E}}(r_\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_\rho}\hat{\mathbf{r}}_\rho \quad .$$

donde $\hat{\mathbf{r}}_\rho = cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + sen\varphi\hat{\mathbf{y}}$ es el vector unitario radial en la dirección φ. Calculamos la diferencia de potencial entre un punto P_1 a una distancia radial a y un punto P_2 a una distancia radial genérica r_ρ. Tomamos un camino radial con elemento de línea $\vec{\mathbf{dl}} = \hat{\mathbf{r}}_\rho dr_\rho$ que parta de P_1 y conecte las circunferencias de radios a y r_ρ y luego un camino sobre el cilindro de radio r_ρ que llegue hasta P_2. Este segundo sector no contribuye al potencial pues el campo eléctrico es perpendicular a él en todo punto. Queda,

$$V(r_\rho) - V(a) = -\int_a^{r_\rho} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_\rho} dr_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\frac{a}{r_\rho}) \ .$$

Esta diferencia de potencial se hace cada vez mas positiva cuando al hacer $r_\rho \to 0$ nos acercamos a la línea de carga. Es decir el máximo del potencial está sobre la línea de carga. Escogiendo el valor arbitrario de $V(a)$ el potencial $V(r_\rho)$ queda totalmente definido.

Ejemplo 37: Diferencia de potencial entre dos conductores cilíndricos con radios a y b, $a < b$ y cargas por unidad de longitud λ_a y λ_b.

En equilibrio los conductores tendrán densidades de carga uniformes σ_a y σ_b tales que $\sigma_a 2\pi a = \lambda_a$ y $\sigma_b 2\pi b = \lambda_b$. La carga en el conductor exterior no produce campo dentro del mismo mientras que la carga en el conductor interior produce un campo como el de una densidad lineal λ_a en la zona entre $a < r_\rho < b$. Usando el resultado del ejemplo anterior, la diferencia de potencial entre los conductores es

$$V(b) - V(a) = -\int_a^{b} \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0 r_\rho} dr_\rho = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0} \ln(\frac{a}{b}) \ .$$

Este resultado es independiente de la carga en el conductor exterior.

Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial

De la definición del potencial sigue que la diferencia de potencial entre dos puntos cercanos separados por $d\vec{\mathbf{r}}$ es

$$V(\vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}}) - V(\vec{\mathbf{r}}) = -\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}}$$

Si consideramos dos puntos separados por dx, $d\vec{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}dx$ y la expresión anterior se reduce a

$$V(x + dx, y, z) - V(x, y, z) = -E_x dx$$

Despejando,

$$E_x = -\lim_{dx\to 0} \frac{V(x + dx, y, z) - V(x, y, z)}{dx} = -\frac{\partial V}{\partial x} \ .$$

donde la derivada parcial con respecto a x se calcula tratando las coordenadas y y z como constantes. De la misma manera podemos calcular las otras componentes del campo eléctrico introduciendo las definiciones análogas para las derivadas parciales respecto a y y z. Tenemos entonces,

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Suele introducirse el operador gradiente como una notación mas compacta para la ecuación anterior y escribir $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\vec{\mathbf{E}}$. Es un hecho general que el gradiente de una función escalar en cada punto es un vector perpendicular a las superficie de los puntos en que la función escalar tiene el mismo valor que en el punto en cuestión.

Ejemplo 38: Dos placas cargadas.

En un ejemplo anterior vimos que para dos placas paralelas cargadas con cargas opuestas el potencial vale $V(z) - V(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}z$ Usando lo anterior el campo eléctrico que se obtiene es $\vec{\mathbf{E}} = -(\sigma/\epsilon_0)\hat{\mathbf{z}}$ que fue nuestro punto de partida para hallar el potencial.

Las relaciones que dedujimos arriba también nos permiten calcular el campo eléctrico en situaciones en que conocemos el potencial sobre una línea y sabemos por la simetría del problema que el campo apunta en esa dirección.

Ejemplo 39: Campo eléctrico del disco cargado sobre el eje.

Para esta configuración calculamos el potencial eléctrico sobre el eje en un ejemplo anterior y por la simetría sabemos que el campo eléctrico apunta el la dirección del eje (el eje z con nuestra escogencia de sistema de coordenadas. La componente z del campo eléctrico sobre el eje vale,

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

de acuerdo con el resultado obtenido calculando directamente el campo.

Energía electrostática de una configuración

Hemos visto que una partícula de prueba de carga q_0 cuando se encuentra en una región donde existe un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ adquiere una energía potencial que se escribe en términos del potencial eléctrico como $U = q_0V$. Al establecer una configuración de cargas las diferentes partículas se ven afectadas por el campo eléctrico que producen todas las demás por lo que el sistema adquiere una energía potencial electrostática que llamaremos U_E y que es la suma de la energía potencial de cada uno de sus componentes. Veamos como calcularla.

Energía potencial de un par de cargas

Sean las cargas q_1 y q_2 en las posiciones $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$. La energía electrostática de esta configuración es la necesaria para traer desde el infinito cada una de las cargas. La energía necesaria para traer la primera es cero pues no hay campo eléctrico que contrarrestar. Para traer la segunda debemos compensar el campo eléctrico producido por la primera. Esta es la cuenta que ya realizamos. El resultado es,

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|}.$$

Energía potencial de un conjunto de cargas

Si ahora tenemos cargas q_1, q_2, q_3 en las posiciones $\vec{\mathbf{r}}_1$,$\vec{\mathbf{r}}_2$, $\vec{\mathbf{r}}_3$ vemos siguiendo el mismo procedimiento que

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{|\vec{\mathbf{r}}_3 - \vec{\mathbf{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_3}{|\vec{\mathbf{r}}_3 - \vec{\mathbf{r}}_2|}.$$

Esto se escribe como

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum\sum_{i\neq j, i<j}^{3}\frac{q_i q_j}{|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_i|} = \frac{1}{2}\sum\sum_{i\neq j}^{3}\frac{q_i q_j}{|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_i|}$$

donde para la segunda igualdad usamos la simetría en Ij de la expresión. Para n cargas cargas $q_1, q_2 \dots q_n$ en las posiciones $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2 \dots \vec{\mathbf{r}}_n$ tendremos,

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum\sum_{i\neq j, i<j}^{n}\frac{q_i q_j}{|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_i|} = \frac{1}{2}\sum\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_i q_j}{|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_i|}$$

Si agrupamos los términos donde aparece una particular q_i vemos que el coeficiente que lo acompaña es proporcional al potencial que siente esa carga. Específicamente encontramos que,

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{\mathbf{r}}_i) \quad .$$

Energía electrostática de distribuciones continuas de carga

Para distribuciones de carga con densidades de volumen ρ, de superficie σ o de línea λ generalizando lo anterior tendremos las siguientes expresiones para la energía electrostática de la configuración,

$$U_E = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \rho(\vec{\mathbf{r}}')V(\vec{\mathbf{r}}')dV \quad ,$$

$$U_E = \frac{1}{2}\int_{\S} \sigma(\vec{\mathbf{r}}')V(\vec{\mathbf{r}}')dS \quad ,$$

$$U_E = \frac{1}{2}\int_{C} \lambda(\vec{\mathbf{r}}')V(\vec{\mathbf{r}}')dl \quad .$$